

Penentuan Lokasi Pengukuran Optimal untuk Identifikasi Sistem Linier dengan Parameter bergantung Ruang

Zulkifli Hidayat

Departemen Teknik Elektro, FTE
Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya 60111
Email: zulkifli@ee.its.ac.id

Abstract—Optimal sensor location selection method for the identification of linear distributed-parameter systems is presented in this paper. The proposed method is a practical method that needs no mathematical model of the system. The selection is based on the input-output data obtained from sensors arranged in grid in the spatial domain of the system. For each sensor, a model is developed by using measurements from neighboring sensors as inputs and simplified by using a model reduction method. Optimal sensor locations are selected based on sensors whose measurement are used in the reduced models. The effectiveness of the method is tested by identifying a model from data generated by a 2D heat conduction equation.

Keywords-system identification distributed-parameter systems; optimal measurement locations; model reduction

Abstrak—Artikel ini membahas metode pemilihan titik pengukuran optimal untuk identifikasi sistem linier dengan parameter bergantung ruang (*distributed-parameter systems*). Metode yang diajukan merupakan metode praktis yang tidak bergantung pada model matematika dari sistem. Pemilihan dilakukan menggunakan data masukan keluaran sistem dari sensor yang disusun membentuk grid. Data ini digunakan untuk melakukan identifikasi sistem pada setiap sensor dengan menggunakan pengukuran dari semua sensor lainnya sebagai input. Lokasi sensor optimal dipilih berdasarkan sensor yang paling banyak dipakai dalam model setelah dilakukan penyederhanaan model. Efektifitas metode ditunjukkan dengan data yang didapatkan dari simulasi model transfer panas berdimensi dua.

Kata kunci-identifikasi sistem; distributed-parameter systems; optimal measurement locations; model reduction

I. PENDAHULUAN

Artikel ini membahas permasalahan penentuan lokasi pengukuran yang optimal untuk identifikasi sistem dengan parameter bergantung ruang. Penentuan titik pengukuran, atau dengan istilah lain lokasi sensor, banyak digunakan pada aplikasi-aplikasi dunia nyata. Sebagai contoh, pada pengaturan proses [1,2]; (missing citation), teknik ruang angkasa (*aerospace*) [3], energi [4] pemantauan struktur bangunan [5], serta fisika teori [6].

Masalah penentuan titik pengukuran optimal untuk identifikasi sistem dengan parameter bergantung ruang berkembang seiring dengan perkembangan teknik pengaturannya. Metode penentuan titik pengukuran optimal ini sudah menjadi perhatian sejak tahun 1970-an. Kubrusly [7] sudah melakukan studi literatur untuk mengumpulkan dan mengklasifikasi metode-metode pemilihan titik pengukuran yang sudah dikembangkan.

Yang lebih baru, Uciński [8] membangun algoritma dengan kriteria D-optimal, yang pada dasarnya merupakan optimisasi matriks Fisher data pengukuran. Dalam buku tersebut, Uciński juga menampilkan beberapa varian dari algoritma yang dikembangkannya untuk kasus-kasus tertentu, yang bergantung pada jenis sistem. Pendekatan lainnya adalah menggunakan dekomposisi modalitas berdasarkan representasi dimensi hingga (*finite-dimensional*) [4]. Dekomposisi modalitas juga digunakan pada [5] dengan memperhitungkan perubahan beban pada struktur.

Pada artikel ini, diajukan metode untuk memilih titik pengukuran optimal yang digunakan untuk melakukan identifikasi sistem dengan parameter bergantung ruang yang sudah terdiskritisasi, baik spasial dengan membuat grid pada variabel ruang maupun temporal. Berbeda dengan metode-metode yang ada pada literatur, metode yang diajukan pada artikel ini menggunakan asumsi model persamaan diferensial parsial sistem tidak diketahui dengan jumlah titik pengukuran yang terbatas hanya pada semua simpul pada grid yang didefinisikan. Metode ini merupakan pengembangan dari metode identifikasi sistem dengan parameter bergantung ruang pada [9]. Metode identifikasi sistem ini secara umum bekerja dengan membuat model pada tiap simpul pada grid dengan menggunakan masukan dari pengukuran pada simpul-simpul sekitarnya yang diikuti dengan penyederhanaan model dengan algoritma berbasis penyelesaian *least-squares*.

Sistematika artikel ini adalah sebagai berikut. Setelah pengantar pada Bagian 1, ditampilkan deskripsi permasalahan pemilihan titik pengukuran optimal pada sistem linier dengan parameter bergantung ruang pada Bagian 2. Metode pemilihan titik pengukuran optimal dijelaskan pada Bagian 3 dimana didalamnya juga dijelaskan metode Lasso yang digunakan untuk menyederhanakan model. Pada Bagian 4 ditampilkan contoh penggunaan metode pada persamaan konduksi panas. Artikel ini ditutup dengan kesimpulan dan topik penelitian selanjutnya pada Bagian 5.

II. FORMULASI DAN BATASAN MASALAH

Pada bagian ini disampaikan formulasi permasalahan pemilihan titik pengukuran optimal untuk identifikasi sistem dengan parameter bergantung ruang. Bagian ini diawali dengan menjelaskan model sistem dengan parameter bergantung ruang dalam variabel waktu dan ruang yang kontinyu yang dilanjutkan dengan permasalahan titik pengukuran dengan kandidat lokasi pengukuran yang terbatas.

Suatu sistem dengan parameter bergantung ruang dinyatakan dengan menggunakan persamaan diferensial parsial yang mencakup syarat batas dan syarat awal sistem. Untuk penyederhanaan notasi, sistem dinyatakan dengan persamaan orde satu dalam waktu dan orde dua dalam ruang. Model dari sistem ini dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial g(z,t)}{\partial t} = f\left(z, t, g(z,t), \frac{\partial g(z,t)}{\partial z_1}, \frac{\partial g(z,t)}{\partial z_2}, \frac{\partial g(z,t)}{\partial z_1 z_2}, \frac{\partial g(z,t)}{\partial z_1^2}, \frac{\partial g(z,t)}{\partial z_2^2}, u(z,t), w(z,t)\right), \quad (1)$$

a) $\forall z \in Z \setminus Z_b, \forall t$

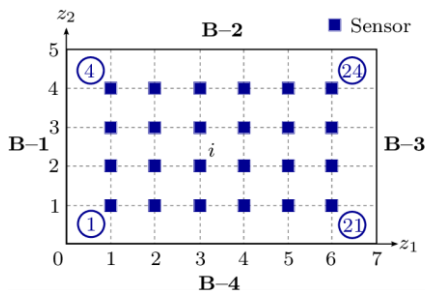
$$0 = h\left(z, t, g(z,t), \frac{\partial g(z,t)}{\partial z_1}, \frac{\partial g(z,t)}{\partial z_2}, u(z,t), w(z,t)\right), \quad (1b)$$

b) $\forall z \in Z_b, \forall t$

$$g(z,t) = g_0(z), \quad \forall z \in Z \quad (1c)$$

dimana $g(\cdot, \cdot)$ adalah variabel yang ingin diketahui nilainya, $f(\cdot)$ adalah fungsi sistem, $h(\cdot)$ adalah fungsi nilai batas, $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in Z \subset \mathbb{R}^2$ adalah koordinat ruang,¹ $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ adalah variabel waktu kontinyu, $u(\cdot, \cdot)$ adalah fungsi masukan, $w(\cdot, \cdot)$ adalah gangguan proses, and Z_b adalah himpunan batas ruang dari sistem. Penggunaan model orde rendah ini dapat dikembangkan untuk model orde tinggi.

Pada sistem (1) dilakukan diskritisasi dalam variabel ruang dan waktu dengan menggunakan metode beda-hingga. Diskritisasi pada variabel ruang menghasilkan grid yang merupakan simpul (*node*) pada variabel ruang. Diasumsikan bahwa antara simpul yang satu dengan simpul yang lain memiliki jarak sama pada tiap sumbu koordinat, namun bisa berbeda antara sumbu koordinat satu dengan lainnya. Sebagai ilustrasi, Gambar 1 adalah grid yang didapatkan dari diskritisasi variabel ruang berdimensi dua, dimana huruf tebal **B-i**, $i = 1, 2, 3, 4$ adalah batas dari ruang.



Gambar 1: Ilustrasi titik-titik koordinat yang merupakan kandidat lokasi sensor untuk mendapatkan data masukan dan keluaran dalam melakukan identifikasi sistem

Asumsi yang diambil pada artikel ini adalah:

1. Pengukuran $g(\cdot, \cdot)$ dilakukan secara periodik setiap T_s detik
2. Terdapat pengukuran keluaran pada semua simpul, dan juga masukan jika ada, pada semua simpul grid

¹ Vektor dinyatakan dengan huruf tebal.

Himpunan lokasi grid dengan notasi \mathcal{M}_g , himpunan lokasi sensor dengan notasi $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_g$ dan himpunan lokasi masukan dengan notasi $\mathcal{M}_u \subseteq \mathcal{M}_g$. Dengan menyatakan pengukuran sebagai vektor $\mathbf{y}(\cdot)$ yang diganggu oleh derau Gaussian $v(z_i, t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{v_i}^2)$, dapat didefinisikan vektor masukan dan pengukuran sebagai berikut:

$$\mathbf{u}(t) = [u(\mathbf{z}_{u,1}, t) \quad \dots \quad u(\mathbf{z}_{u,N_u}, t)]^T \quad (2a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} g(\mathbf{z}_{g,1}, t) + v(\mathbf{z}_{g,1}, t) & \dots \\ (\mathbf{z}_{g,N_s}, t) + v(\mathbf{z}_{g,N_s}, t) \end{bmatrix}^T \quad (2b)$$

dimana N_u adalah banyaknya aktuator, N_s banyaknya sensor, koordinat lokasi masukan adalah $\mathbf{z}_{u,j} \in \mathcal{M}_u$, koordinat lokasi pengukuran adalah $\mathbf{z}_{g,i} \in \mathcal{M}_g$, dan superskrip T menyatakan operasi transpos dari matriks atau vektor.

Untuk pengukuran pada waktu diskrit $t_k = k \cdot T_s$ dengan $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan dengan menyederhanakan notasi t_k ditulis dengan k menggunakan subskrip bilangan bulat pada lokasi sensor atau aktuator, data masukan dan keluaran dapat ditulis menjadi:

$$u_j(k) = u(\mathbf{z}_{u,j}, t)|_{t=k \cdot T_s}, \quad j = 1, \dots, N_u$$

untuk masukan dan

$$y_i(k) = (g(\mathbf{z}_{g,i}, t) + v(\mathbf{z}_{g,i}, t))|_{t=k \cdot T_s}, \quad i = 1, \dots, N_s$$

untuk keluaran.

Permasalahan yang menjadi topik artikel ini adalah bagaimana memilih titik pengukuran optimal dalam variabel ruang sistem sehingga bisa didapatkan data pengukuran masukan dan keluaran yang dapat digunakan untuk identifikasi sistem dengan jumlah titik pengukuran yang optimal.

III. PENENTUAN TITIK PENGUKURAN OPTIMAL UNTUK IDENTIFIKASI

Karena keterkaitannya yang erat, pada bagian ini ditampilkan secara ringkas metode identifikasi sistem dengan parameter bergantung ruang yang diajukan pada (missing citation). Setelahnya akan ditunjukkan bagaimana memilih titik pengukuran yang optimal jika telah ditetapkan semua kandidat titik pengukuran.

Dari (missing citation), model masukan keluaran pada simpul i dapat dinyatakan dengan:

$$y_i(k+1) = F(y_{N_s,i}(k), u_{N_u,i}(k), v_{N_s,i}(k))$$

untuk $y_{N_s,i}(k)$ himpunan pengukuran dari tetangga termasuk y_i sendiri dan F adalah suatu fungsi yang pada artikel ini diasumsikan linier. Tetangga dari simpul i adalah semua simpul yang berada dalam radius ρ dari simpul i , i.e., $y_{N_s,i}(k) = \{y(\mathbf{z}, k) \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_i\| \leq \rho, \mathbf{z} \in \mathcal{M}_u \cup \mathcal{M}_s\}$ untuk pengukuran dan $u_{N_u,i}(k) = \{u(\mathbf{z}, k) \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_i\| \leq \rho, \mathbf{z} \in \mathcal{M}_u \cup \mathcal{M}_s\}$ untuk masukan. Pengetahuan

a priori dapat digunakan untuk menentukan nilai ϱ . Model linier yang digunakan dalam artikel ini mempunyai bentuk

$$y(k+1) = \boldsymbol{\phi}^T(k)\boldsymbol{\theta} \quad (3)$$

dengan $\boldsymbol{\phi}$ adalah vektor regresor, $\boldsymbol{\theta}$ dan θ_0 adalah vektor koefisien model. Sebagai contoh, model pada sensor i adalah

$$y_i(k+1) = a_{1,0}y_i(k) + a_{1,1}y_i(k-1) + a_{2,2}y_2(k-2) + b_{1,3}u_1(k-3)$$

dimana y_i , $a_{i,j}$, dan $b_{i,j}$ masing-masing adalah pengukuran dari sensor i , koefisien model dari sensor i untuk regresor $y(k-j)$ dan $b_{i,j}$ koefisien dari masukan i untuk regresor $u(k-j)$. Dengan bentuk model (3), koefisien model dapat dihitung dengan menggunakan metode kesalahan minimum terkecil (*least-squares*).

Untuk keperluan pemilihan titik pengukuran yang optimal, semua simpul pada grid menjadi tetangga bagi simpul yang lain, yaitu tetangga dari pengukuran pada grid i adalah semua titik pengukuran $j \in \mathcal{M}_s$ yang bisa ditulis

$$\mathcal{N}_{s,i} = \mathcal{M}_s = \mathcal{M}_g$$

Menggunakan semua titik pengukuran sebagai tetangga bisa didapatkan dengan membuat ϱ cukup besar dan mencakup semua titik pada domain ruang.

Dengan menjadikan semua sensor pada grid menjadi tetangga, model pada suatu simpul akan menjadi kompleks dengan banyaknya parameter dari pengukuran simpul tetangga, termasuk *lag*-nya. Efek negatif dari model dengan banyak parameter adalah *overfit* yang ditandai dengan rendahnya kinerja model untuk membuat prediksi dari data validasi, yaitu data yang tidak digunakan dalam perhitungan parameter model.

Model yang terlalu kompleks harus disederhanakan, yaitu dengan menghilangkan masukan pengukuran dari tetangga yang tidak berpengaruh signifikan pada kinerja model. Dengan demikian model yang disederhanakan menjadi model yang *sparse*, yaitu model dengan kebanyakan parameter bernilai nol. Penyederhanaan model akan memperbaiki kinerja prediksi model dan meninggalkan sedikit komponen dari pengukuran tetangga. Komponen pengukuran tetangga pada model adalah komponen yang penting dan yang tidak pernah diabaikan oleh algoritma penyederhanaan model. Titik pengukuran optimal akan selalu digunakan oleh model setelah tahap penyederhanaan.

A. Least Absolute Shrinkage and Selection Operator (Lasso)

Pada bagian ini dijelaskan mengenai metode penyederhanaan model berbasis metode penyelesaian *least-squares*, yaitu Lasso (missing citation).

Lasso adalah optimisasi metode optimisasi *least-squares* menggunakan regularisasi L_1 yang menggunakan fungsi hukuman dengan norm ℓ_1 . Berbeda dengan ridge regression yang tidak bisa membuat suatu parameter model bernilai nol, Lasso akan menghasilkan model yang *sparse*

karena regresor yang tidak berkontribusi signifikan pada pengurangan kesalahan model akan diberi bobot nol. Pada Lasso diasumsikan model regresinya adalah

$$\hat{y} = \theta_0 + \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\theta} \quad (4)$$

yang serupa dengan (3) tanpa variabel waktu dengan tambahan koefisien bias pada θ_0 . Lasso mencari parameter sedemikian sehingga regresor yang tidak penting mendapat nilai koefisien sama dengan nol. Regresor yang tidak penting ditandai dengan nilai koefisien yang sangat kecil pada model sebelum penyederhanaan. Penyederhanaan dengan Lasso dilakukan dengan menyelesaikan masalah optimisasi berikut [10]:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\theta}_0 \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \right]^T &= \arg \min_{\theta_0, \boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^N (y_i - \theta_0 - \boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{\theta})^2, \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^{n_r} |\theta_j| &\leq \tau \end{aligned} \quad (5)$$

dimana τ adalah parameter penala yang untuk kasus sederhana dianggap konstan dan dapat langsung dikembangkan untuk penala berupa vektor. Representasi optimisasi ini juga dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \left[\hat{\theta}_0 \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \right]^T &= \arg \min_{\theta_0, \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (y_i - \theta_0 - \boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{\theta})^2 + \right. \\ &\left. \lambda \sum_{j=1}^{n_r} |\theta_j| \right) \end{aligned} \quad (6)$$

dimana λ adalah parameter regularisasi yang tidak negatif. Formulasi (5) ekuivalen dengan formulasi (6) dengan arti bahwa untuk setiap $\tau \geq 0$ pada (5), terdapat suatu $\lambda \in [0, \infty)$ pada (6) sehingga solusi dari kedua formulasi sama, dan juga sebaliknya.

B. Metode Penentuan Titik Pengukuran Optimal

Prosedur untuk menentukan titik pengukuran optimal pada artikel ini sebagai berikut:

1. Buat grid pada domain ruang pada sistem
2. Tempatkan sensor pada semua simpul grid
3. Lakukan eksperimen pengambilan data masukan dan keluaran sistem
4. Identifikasi model pada tiap simpul dengan pengukuran pada semua simpul lain sebagai masukan
5. Sederhanakan model yang didapat pada langkah 4
6. Pengukuran yang digunakan oleh model di semua simpul adalah titik pengukuran optimal

Metode penyederhanaan model untuk pengukuran tiap simpul tidak harus menggunakan Lasso seperti yang digunakan pada artikel ini. Metode-metode lain seperti Elastic Net [11].

IV. APLIKASI

Metode pemilihan titik pengukuran optimal ini diaplikasikan pada data pengukuran dari simulasi persamaan panas 2-dimensi. Model yang digunakan untuk simulasi adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(\mathbf{z}, t)}{\partial t} &= \frac{\kappa}{\rho C_p} \left[\frac{\partial T(\mathbf{z}, t)}{\partial z_1^2} + \frac{\partial T(\mathbf{z}, t)}{\partial z_2^2} \right], \forall \mathbf{z} \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}_b, \forall t \\ T(\mathbf{z}, t) &= T_b(t), \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_b, \forall t \\ T(\mathbf{z}, 0) &= T_0, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{Z} \end{aligned} \quad (7)$$

dimana $T(\mathbf{z}, t)$ adalah temperatur pada koordinat \mathbf{z} dan waktu t , ρ kepadatan material, T_0 temperatur awal, C_p kapasitas panas, κ konduktivitas panas, dan $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ koordinat ruang sistem. Persamaan (7) atas dan setelahnya adalah berturut-turut syarat batas dan kondisi awal. Parameter yang digunakan pada model ditampilkan pada Tabel 1. Nilai-nilai dari sifat material diambil dari [12] dan dimodifikasi untuk mempercepat waktu simulasi.

Tabel 1 Parameter untuk membuat data simulasi dari persamaan panas 2-dimensi

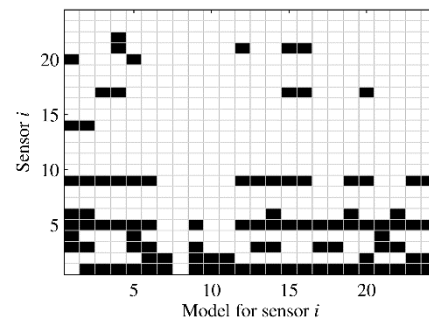
Parameter	Simbol	Nilai	Satuan
Kepadatan material	ρ	4700	kg.m ⁻³
Konduktifitas termal	κ	700	W.m ⁻¹ K ⁻¹
Kapasitas panas	C_p	383	J.kg ⁻¹ K ⁻¹
Panjang	L	0.7	m
Lebar	W	0.5	m
Temperatur awal	T_0	35	°C
Period sampling	T_s	1	s
Ukuran grid	Δ_1, Δ_2	0.1	m

Untuk contoh ini, data pengukuran didapatkan dengan melakukan simulasi pada model (7) yang didiskritisasi menggunakan metode beda hingga dengan aproksimasi tengah (*central approximation*) sehingga didapatkan grid dengan simpul sebanyak 6×4. Ilustrasi dari grid ditampilkan pada Gambar 2. Untuk diskritisasi waktu digunakan *zero-order hold*. Sinyal masukan tidak diberikan pada simpul, melainkan pada batas ruang sistem **B-1** sampai **B-4**. Pada tiap batas diberikan empat sinyal biner *pseudo-random* yang berbeda dengan level 25°C dan 80°C. Durasi level sinyal dipilih secara acak dari himpunan {80,120, ...,200} detik.

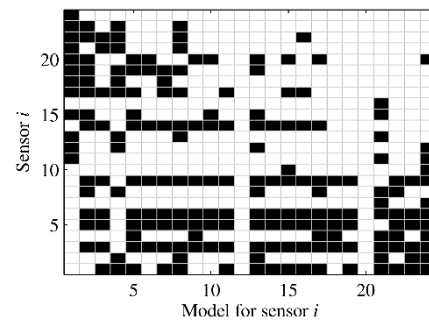
Setelah melakukan identifikasi dan penyederhanaan, regressor dari sensor i diperiksa dimana parameter yang tidak bernilai nol menandakan sensor i digunakan pada model. Semakin banyak sensor i dipakai pada sensor-sensor lain menunjukkan bahwa lokasi sensor i adalah lokasi yang optimal. Perlu diingat bahwa, hasil bisa berbeda jika menggunakan diskritisasi dengan parameter yang berbeda. Analisis dilakukan pada model dengan 11 dan 25 parameter. Pemilihan banyaknya parameter dilakukan tanpa preferensi tertentu.

Hasil dari penyederhanaan ditunjukkan oleh Gambar 2. Pada gambar, sumbu datar adalah model sensor dan sumbu tegak menyatakan sensor-sensor yang digunakan pada model. Penggunaan sensor i pada model ditandai dengan kotak hitam pada arah tegak. Jika sensor tidak digunakan, digambarkan dengan kotak putih. Dalam hal ini, semakin

penting pengukuran dari sensor i ditandai dengan semakin banyaknya kotak hitam dalam arah mendatar.



(a) Model dengan 11 parameter



(b) Model dengan 11 parameter

Gambar 2: Sensor yang pengukurannya digunakan pada model.

Pada model dengan 11 parameter, Gambar 2a menunjukkan sensor 1, 5, dan 9 adalah sensor yang terpenting karena digunakan oleh sebagian besar model. Ini berarti lokasi sensor 1, 5, dan 9 adalah kandidat utama sebagai lokasi pengukuran. Selain itu juga terlihat beberapa kolom putih yang menandakan tidak adanya model dari pengukuran pada lokasi tersebut. Dengan kata lain, penyederhanaan model menjadi 11 parameter tidak berhasil dilakukan oleh Lasso. Dari Gambar 2b terlihat sensor 3, 6, dan 14 yang banyak digunakan.

V. RANGKUMAN DAN Riset LANJUTAN

Pada artikel ini diajukan metode pemilihan titik pengukuran optimal untuk identifikasi sistem linier dengan parameter bergantung ruang. Metode yang diajukan merupakan metode yang praktis karena tidak menggunakan model matematika sistem dan dapat dipakai pada sistem yang memungkinkan instalasi sensor dalam bentuk grid. Efektifitas metode sudah diaplikasikan pada data yang didapat dari simulasi persamaan panas berdimensi dua.

Metode ini terbatas pada pengukuran dalam bentuk grid dalam domain ruang. Kepadatan grid yang berbeda, yang artinya posisi sensor-sensor yang berbeda, akan menghasilkan kandidat posisi pengukuran yang berbeda. Metode dapat dikembangkan dengan metode kriging sehingga dengan satu konfigurasi grid sehingga dimungkinkan modifikasi grid tanpa mengubah posisi fisik sensor.

VI. DAFTAR PUSTAKA

- [1] P. Mobed, S. Munusamy, D. Bhattacharyya, and R. Rengaswamy, "State and parameter estimation in distributed constrained systems. 2. GA-EKF based sensor placement for a water gas shift reactor," *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 56, no. 1, pp. 216–224, 2017.
- [2] Y. Privat, E. Trélat, and E. Zuazua, "Optimal observation of the one-dimensional wave equation," *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 19, no. 3, pp. 514–544, 2013.
- [3] E. Trélat, "Optimal control and applications to aerospace: Some results and challenges," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 154, no. 3, pp. 713–758, 2012.
- [4] P. Wolf, S. Moura, and M. Krstic, "On optimizing sensor placement for spatio-temporal temperature estimation in large battery packs," in *Proceedings of the 2012 IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, HI, USA, Dec 2012, pp. 973–978.
- [5] D.-S. Li, H.-N. Li, and C.-P. Fritzen, "Load dependent sensor placement method: Theory and experimental validation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 31, pp. 217 – 227, 2012.
- [6] Y. Privat, E. Trélat, and E. Zuazua, "Optimal sensor location for wave and Schrödinger equations," in *Proceedings of HYP2012*, 2013.
- [7] C. Kubrusly and H. Malebranche, "Sensors and controllers location in distributed systems: A survey," *Automatica*, vol. 21, no. 2, pp. 117–128, 1985.
- [8] D. Uciński, *Optimal Measurement Methods for Distributed Parameter System Identification*. USA: CRC Press, 2004.
- [9] Z. Hidayat, R. Babuska, A. N. Vicencio, and B. D. Schutter, "Identification of distributed-parameter systems from sparse measurements," *Dalam proses review untuk publikasi*, 2017.
- [10] R. Tibshirani, "Regression shrinkage and selection via the lasso," *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, vol. 58, no. 1, pp. 267–288, Jan. 1996.
- [11] H. Zou and T. Hastie, "Regularization and variable selection via the elastic net," *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, vol. 67, no. 2, pp. 301–320, 2005.
- [12] J. P. Holman, *Heat Transfer*, 10th ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill Higher Education, 2009.